

一类 Markov 跳变系统鲁棒方差控制

伍友利¹, 方洋旺¹, 董福安², 刘万俊¹

(1. 空军工程大学工程学院二系, 陕西西安 710038; 2. 空军工程大学理学院数理系, 陕西西安 710051)

摘 要: 针对一类结构参数不完全已知的离散时间不确定 Markov 跳变系统, 研究其闭环系统状态稳态方差小于某一给定上界约束时的鲁棒控制器设计问题. 运用线性矩阵不等式方法(LMI), 对系统进行了方差分析, 给出并证明了控制器存在的条件, 进而用一组线性矩阵不等式的可行解给出了控制器的一个参数化表示. 最后仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 约束方差; H_∞ 性能; Markov 跳变系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP271.74 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 06-1438-05

Robust Variance-Constrained Control for a Class of Markov Jumping System

WU You-li¹, FANG Yang-wang¹, DONG Fu-an², LIU Wan-jun¹

(1. Dept of the Second, Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China;

2. Dept of Mathematic and Physics, Science College, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The design problem of state feedback robust controller is concerned for a class uncertain Markov jump linear system whose mode is not available completely. The controller guarantees the closed-loop steady-state variance to be less than given upper bounds based on linear matrix inequality (LMI) method, system variance has been analyzed, and conditions of existence of such controllers are proposed and proved. A parameterized representation of a set of desired controllers is characterized in terms of the feasible solutions to the LMI system. Finally, the simulation results show the effectiveness of the method.

Key words: variance constraint; H_∞ performance; Markov jump system; linear matrix inequality

1 引言

在工程实际问题中, 许多系统都会因为内部子系统的故障、维修、受到突发扰动、子系统之间关联情况发生改变等原因而造成系统在结构和参数上的突变. 通过大量的研究发现, 这种随机变化通常遵循 Markov 过程的变化规律, 可以采用 Markov 跳变系统模型(Markov Jump Linear Systems, MJLS)进行描述. MJLS 由一组微分方程(或差分方程)和具有有限状态的离散 Markov 链组成. 近 40 多年来, 这类系统受到学者们的广泛关注, 出现了大量的研究成果^[1~6]. Mariton 和 Costa 分别在专著[3, 4]中总结了离散和连续 MJLS 的主要研究成果, 包括稳定性、均方控制、鲁棒控制和滤波等. Xu^[5]等研究了双线性 Markov 跳变系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. Shi^[6]对一类由 MJLS 描述的容错系统研究了其鲁棒控制问题.

另一方面, 在实际工程应用中, 许多控制问题的性能指标常常直观地表现为系统状态稳态方差的上界形式. 以此为背景而形成的约束方差控制问题得到了国内外学者的广泛关注, 取得了一些重要的研究成果^[7~10].

Wang^[11]等讨论了具有乘性噪声和方差约束的随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 给出了具有方差约束的鲁棒控制器设计方法. Wang 和 Daniel^[12]研究了一类不确定系统具有方差约束和 D 稳定的输出反馈控制问题. Markov 跳变系统具有方差约束的鲁棒 H_∞ 控制问题的研究目前还没有见到. 许多实际物理系统对于系统状态方差有着特定的要求, 因此, Markov 跳变系统的方差控制具有重要的理论和应用价值.

本文将针对一类系统结构参数不完全已知的 Markov 跳变系统, 采用线性矩阵不等式(LMI, Linear Matrix Inequality)方法, 研究其具有方差约束的鲁棒状态反馈控制器的设计问题.

2 问题描述

在给定概率空间 (Ω, F, P) 中, 考虑如下不确定离散时间 Markov 跳变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A}(r_k) + \Delta\mathbf{A}_k(r_k))\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(r_k)\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) + \mathbf{G}(r_k)\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{C}(r_k)\mathbf{x}_k + \mathbf{D}(r_k)\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) + \mathbf{L}(r_k)\mathbf{w}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}$ 为系统状态, $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}$ 为控制输出. 过程噪声 $\mathbf{w}_k$ 为零均值高斯白噪声, 其强度为 $R > 0$.

r_k 为在有限集 $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, \nu\}$ 中取值的离散时间 Markov 链, 表示系统所处的结构状态, 假设 r_k 不完全已知, 可进行观测, 其观测结果由 η_k 表示, η_k 为在有限集 $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, \mu\}$ 中取值的关于 r_k 条件 Markov 链.

对于 r_k , 其一步转移概率为:

$$\alpha_{il} = \Pr\{r_{k+1} = l | r_k = i\}, \quad i, l \in \mathcal{L} \quad (2)$$

式中 $\alpha_{il} \geq 0$, 且 $\sum_{l=1}^{\nu} \alpha_{il} = 1$.

对于 η_k , 其一步条件转移概率为:

$$q_{il}^j = \Pr\{\eta_{k+1} = l | \eta_k = i, r_k = j\}, \quad i, l \in \mathcal{S} \quad (3)$$

式中 $q_{il}^j \geq 0$, 且 $\sum_{l=1}^{\mu} q_{il}^j = 1$.

容许不确定参数满足匹配性条件:

$$\Delta \mathbf{A}_k(r_k) = \mathbf{H}(r_k) \mathbf{F}_k(r_k) \mathbf{M}(r_k) \quad (4)$$

式中实矩阵 $\mathbf{F}_k(r_k)$ 表示参数不确定性, 满足:

$$\mathbf{F}_k^T(r_k) \mathbf{F}_k(r_k) \leq \mathbf{I}, \quad r_k \in \mathcal{L} \quad (5)$$

假设对于系统(1), 反馈控制律具有如下形式:

$$\mathbf{u}_k(r_k, \eta_k, \mathbf{x}_k) = \mathbf{K}(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k \quad (6)$$

则系统(1)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{G}(r_k) \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \bar{\mathbf{C}}(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{L}(r_k) \mathbf{w}_k \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\bar{\mathbf{A}}(r_k, \eta_k) = \mathbf{A}(r_k) + \mathbf{B}(r_k) \mathbf{K}(r_k, \eta_k) + \mathbf{H}(r_k) \mathbf{F}_k(r_k) \mathbf{M}(r_k)$, $\bar{\mathbf{C}}(r_k, \eta_k) = \mathbf{C}(r_k) + \mathbf{D}(r_k) \mathbf{K}(r_k, \eta_k)$.

对 $r_k = i \in \mathcal{L}$, $\eta_k = j \in \mathcal{S}$, 记 $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(r_k)$, $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}(r_k)$, $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}(r_k)$, $\mathbf{D}_i = \mathbf{D}(r_k)$, $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}(r_k)$, $\bar{\mathbf{A}}_{ij} = \bar{\mathbf{A}}(r_k, \eta_k)$, $\bar{\mathbf{C}}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}(r_k, \eta_k)$, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}(r_k)$, $\mathbf{F}_{i,k} = \mathbf{F}_k(r_k)$, $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}(r_k)$.

定义 1^[13] 系统(1)是鲁棒随机稳定的, 如果对每个初始状态 $(\mathbf{x}_0, r_0)$ 和所有的容许不确定参数 $\Delta \mathbf{A}_k(r_k)$, 存在有限数 $N(\mathbf{x}_0, r_0)$, 使得如下不等式成立:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_k^T(\mathbf{x}_0, r_0) \mathbf{x}_k(\mathbf{x}_0, r_0) \right\} < N(\mathbf{x}_0, r_0)$$

定义 2 对于每一个 $i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S}$, 定义系统(1)的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_k(i, j) &:= E[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T] \\ &= E[\mathbf{x}_k(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k(r_k, \eta_k)^T | r_k = i, \eta_k = j] \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_k(r_k, \eta_k) &= E[\mathbf{x}_k(r_k, \eta_k) \mathbf{x}_k(r_k, \eta_k)^T] \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} E[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T | r_k = i, \eta_k = j] \\ &\quad \times P\{\eta_k = j | r_k = i\} P\{r_k = i\} \end{aligned}$$

记 $\hat{\mathbf{Q}}_{ij} := \lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}_k(i, j) \mathbf{x}_k(i, j)^T] = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{Q}}_k(i, j)$.

如果系统(1)鲁棒随机稳定, 则状态的稳态协方差

存在,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}(r_k, \eta_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{Q}}_k(r_k, \eta_k) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \hat{\mathbf{Q}}_{ij} \\ P\{\eta_k = j | r_k = i\} &P\{r_k = i\}. \end{aligned}$$

本文的目标是关于系统(1), 设计形如式(6)的状态反馈控制器, 对于所有的容许不确定性, 同时满足如下三个条件:

(Q1) 系统(1)是鲁棒随机稳定的;

(Q2) 对于给定标量 $\gamma > 0$, 初始状态 $\mathbf{x}_0 = 0$ 和所有的非零 $\mathbf{w}_k$, 控制输出 $\mathbf{z}_k$ 满足:

$$\sum_{k=0}^N E[\|\mathbf{z}_k\|^2] \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N E[\|\mathbf{w}_k\|^2] \quad (8)$$

(Q3) 对于所有的 $i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S}, s = 1, \dots, n$, 系统状态稳态方差满足如下约束:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{x}_{k,s}(i, j)] &:= \lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{x}_{k,s}(i, j) \mathbf{x}_{k,s}(i, j)^T] \\ &= [\hat{\mathbf{Q}}_{ij}]_{ss} < \sigma_{ij}^2(s) \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{x}_k(i, j) = [\mathbf{x}_{k,1}(i, j) \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k,n}(i, j)]^T$, 给定标量 $\sigma_{ij}^2(s) > 0 (i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S}, s = 1, \dots, n)$ 为由实际问题所要求的可接受方差上界.

3 鲁棒方差 H_{∞} 控制

本节讨论 Markov 跳变系统的多目标(稳定性、 H_{∞} 性能和方差约束)控制问题. 为了便于问题的求解, 本文将采用线性矩阵不等式描述主要结果. 对一组对称正定矩阵 $\{Q_{ij}, i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S}\}$, 记

$$\bar{\mathbf{Q}}_{ij} = \sum_{h=1}^{\nu} \alpha_{hj} \sum_{l=1}^{\mu} q_{il}^h \mathbf{Q}_{lh} = \boldsymbol{\Omega}_{ij} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Omega}_{ij}^T \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{ij} &= [\sqrt{\alpha_{1j} q_{i1}^1} \mathbf{I} \quad \dots \quad \sqrt{\alpha_{1j} q_{i\mu}^1} \mathbf{I} \quad \dots \quad \sqrt{\alpha_{\nu j} q_{i1}^{\nu}} \mathbf{I} \quad \dots \quad \sqrt{\alpha_{\nu j} q_{i\mu}^{\nu}} \mathbf{I}] \\ &\quad (11) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \text{diag}(\mathbf{Q}_{11}, \dots, \mathbf{Q}_{\mu 1}, \dots, \mathbf{Q}_{1\nu}, \dots, \mathbf{Q}_{\mu\nu}). \quad (12)$$

定理 1 给定标量 $\gamma > 0$, 称系统(1)是鲁棒随机稳定的, 且具有 H_{∞} 衰减度 γ , 如果存在一组对称正定矩阵 $\{Q_{ij}, i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S}\}$, 使得如下矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{ij} & 0 & \mathbf{Q}_{ij} \bar{\mathbf{A}}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} & \mathbf{Q}_{ij} \bar{\mathbf{C}}_{ij}^T \\ 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} & \mathbf{L}_i^T \\ \boldsymbol{\Omega}_{ij}^T \bar{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{Q}_{ij} & \boldsymbol{\Omega}_{ij}^T \mathbf{G}_i & -\boldsymbol{\Psi} & 0 \\ \bar{\mathbf{C}}_{ij} \mathbf{Q}_{ij} & \mathbf{L}_i & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 分别由式(11)、(12)给出.

证明 由式(13), 有如下不等式成立,

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_{ij} & \mathbf{Q}_{ij} \bar{\mathbf{A}}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}_{ij} \\ \boldsymbol{\Omega}_{ij}^T \bar{\mathbf{A}}_{ij} \mathbf{Q}_{ij} & -\boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{S} \quad (14)$$

从而, 与文献[5]的证明过程类似, 由上式可知系统(1)

是鲁棒随机稳定的.

令 $P_{ij} = Q_{ij}^{-1}$, $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{S}$. 对式(13)左乘和右乘 $\text{diag}[P_{ij}, I, I, I]$, 有如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P_{ij} & 0 & \bar{A}_{ij}^T \Omega_{ij} & \bar{C}_{ij}^T \\ 0 & -\gamma^2 I & G_i^T \Omega_{ij} & L_i^T \\ \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} & \Omega_{ij}^T G_i & -I & 0 \\ \bar{C}_{ij} & L_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

式中 $\Gamma = \text{diag}(P_{11}^{-1}, \dots, P_{\mu 1}^{-1}, \dots, P_{1\nu}^{-1}, \dots, P_{\mu\nu}^{-1})$.

由 Schur 补引理^[14], 式(13)等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} - P_{ij} + \bar{C}_{ij}^T \bar{C}_{ij} & \bar{C}_{ij}^T L_i \\ G_i^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij} + L_i \bar{C}_{ij} & G_i^T \Omega_{ij} \Gamma^{-1} \Omega_{ij}^T G_i + L_i^T L_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

与文献[9]的证明方法相似, 容易证明当式(15)成立时, 对任意的 $w_k \neq 0$, 有

$$\sum_{k=0}^N E[\|z_k\|^2] \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N E[\|w_k\|^2]$$

成立. 证毕.

由定义 2, 当系统(1)鲁棒随机稳定时, 对于任意的 $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{S}$, 稳态状态协方差矩阵 $\hat{Q}_{ij}$ 满足如下等式:

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} \hat{\Psi} \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T - \hat{Q}_{ij} + G_i R G_i^T = 0 \quad (17)$$

式中 Ω_{ij} 由式(11)给出, $\hat{\Psi} = \text{diag}(\hat{Q}_{11}, \dots, \hat{Q}_{\mu 1}, \dots, (\hat{Q}_{1\nu}, \dots, \hat{Q}_{\mu\nu}))$.

定理 2 系统(1)是鲁棒随机稳定的, 且有 $\hat{Q}_{ij} \leq Q_{ij}$. 如果存在一组对称正定矩阵 $\{Q_{ij}, i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{S}\}$ 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & 0 & (Q_{ij} A_i^T + Y_{ij}^T B_i^T) \Omega_{ij} & Q_{ij} C_i^T + Y_{ij}^T D_i^T & Q_{ij} M_i^T \\ 0 & -\gamma^2 I & G_i^T \Omega_{ij} & L_i^T & 0 \\ \Omega_{ij}^T (A_i Q_{ij} + B_i Y_{ij}) & \Omega_{ij}^T G_i & \varepsilon_{ij} \Omega_{ij}^T H_i H_i^T \Omega_{ij} - \Psi & 0 & 0 \\ C_i Q_{ij} + D_i Y_{ij} & L_i & 0 & -I & 0 \\ M_i Q_{ij} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & (A_i Q_{ij} + B_i Y_{ij}) \Omega_{ij} & G_i Q_{ij} & Q_{ij} M_i^T \\ \Omega_{ij}^T (Q_{ij} A_i^T + Y_{ij}^T B_i^T) & \zeta_{ij} \Omega_{ij}^T H_i H_i^T \Omega_{ij} - \Psi & 0 & 0 \\ Q_{ij} G_i^T & 0 & -R^{-1} & 0 \\ M_i Q_{ij} & 0 & 0 & -\zeta_{ij} I \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[Q_{ij}]_{ss} < \sigma_{ij}^2(s) \quad (24)$$

式中 $[Q_{ij}]_{ss}$ 为矩阵 Q_{ij} 对角线上的元素, Ω_{ij} 和 Ψ 分别由式(11)、(12)给出.

证明 考虑不确定项 $F_k^T(r_k) F_k(r_k) \leq I$, 对式(13)、(18)运用公式 $DFU + (DFU)^T \leq \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} U^T U$ ^[13], 再将其表示成线性矩阵不等式的形式即可得到式(22)、(23). 由定理 1 知, 当式(22)成立时, 系统是鲁棒随机稳定的, 且具有 H_∞ 衰减度 γ , 即条件 (Q1)、(Q2) 满足. 由定理 2 知, 当式(23)成立时, 系统(1)是鲁

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & \bar{A}_{ij} Q_{ij} \Omega_{ij} & G_i Q_{ij} \\ \Omega_{ij}^T Q_{ij} \bar{A}_{ij}^T & -\Psi & 0 \\ Q_{ij} G_i^T & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

式中 Ω_{ij} 和 Ψ 分别由式(11)、(12)给出.

证明 由 Schur 补引理, 有如下不等式成立,

$$\begin{bmatrix} -Q_{ij} & \bar{A}_{ij} Q_{ij} \Omega_{ij} \\ \Omega_{ij}^T Q_{ij} \bar{A}_{ij}^T & -\Psi \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

注意到式(19)为如下方程的稳定性条件,

$$x_{k+1} = \bar{A}^T(r_k, \eta_k) x_k$$

由于矩阵 A 与 A^T 稳定的等价性 (A 与 A^T 的谱半径相等), 所以当式(19)成立时系统(1)也是鲁棒随机稳定的.

由 Schur 补引理, 式(18)等价于

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} \Psi \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T - Q_{ij} + G_i R G_i^T < 0 \quad (20)$$

由式(20)减去式(17), 有

$$\bar{A}_{ij} \Omega_{ij} (\Psi - \hat{\Psi}) \Omega_{ij}^T \bar{A}_{ij}^T - (Q_{ij} - \hat{Q}_{ij}) < 0 \quad (21)$$

所以有 $Q_{ij} - \hat{Q}_{ij} \geq 0$. 证毕.

下面将针对系统(1), 给出满足条件 (Q1) ~ (Q3) 的状态反馈鲁棒控制器的设计方法.

定理 3 给定 $\gamma > 0$, $\sigma_{ij}^2(s)$ ($i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{S}, s = 1, \dots, n$), 如果存在一组正定对称矩阵 Q_{ij} , 实矩阵 Y_{ij} 和正数 $\varepsilon_{ij}, \zeta_{ij}$ 使得下列矩阵不等式有解, 则存在形如式(6)的反馈控制器使得对所有的容许不确定性, 条件 (Q1) ~ (Q3) 满足, 且控制器增益为:

$$K_{ij} = Y_{ij} Q_{ij}^{-1}.$$

棒随机稳定的, 且有 $\hat{Q}_{ij} \leq Q_{ij}$, 式(24)成立, 即条件 (Q3) 满足, 所以当式(22) ~ (24) 有可行解时, 控制器 $u_k(r_k, \eta_k, x_k) = K(r_k, \eta_k) x_k$ 使得系统性能满足条件 (Q1) ~ (Q3). 证毕.

注: 当 $\xi_k \equiv 0$ 且无方差约束时, 关于鲁棒控制器的设计方法, 文献[6]给出了控制器的代数形式, 而本文利用线性矩阵不等式方法给出了控制器的线性矩阵不等式描述. 文献[6]在求解控制器时需要手动调整 ε_{ij} 的

值,需要一定的经验,并且受到人为因素的影响.而采用线性矩阵不等式描述时,可以利用 Matlab LMI 工具箱求解,将 $\mathbf{Q}_{ij}$, $\mathbf{Y}_{ij}$ 作为矩阵变量, ϵ_{ij} 和 ζ_{ij} 作为常值变量进行求解,并且利用 LMI 方法还可以方便的用来设计具有某些特定性能的控制器的,如最小方差鲁棒控制器等.

4 仿真实例

对于模型(1),考虑两模态情形:

模态 1($r(k) = 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(1) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}(1) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, & \mathbf{L}(1) &= [0.1 \quad 0.1], \\ \mathbf{C}(1) &= [0 \quad 0.5], & \mathbf{D}(1) &= [0.6 \quad 0.2], \\ \mathbf{M}(1) &= [0.3 \quad 0], & \mathbf{H}(1) &= [0.1 \quad 0.2]^T. \end{aligned}$$

模态 2($r(k) = 2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(2) &= \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}(2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{L}(2) &= [-0.1 \quad -0.1], \\ \mathbf{C}(2) &= [0.5 \quad 0.1], & \mathbf{D}(2) &= [0 \quad -0.2], \\ \mathbf{M}(2) &= [0.1 \quad 0.3], & \mathbf{H}(2) &= [0.1 \quad 0.1]^T, \mathbf{R} = 1. \end{aligned}$$

结构转移概率矩阵为:

$$\begin{aligned} \nu = 2, & \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{11} \\ \alpha_{11} & \alpha_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}, \\ \mu = 2, & \begin{bmatrix} q_{11}^1 & q_{12}^1 \\ q_{21}^1 & q_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{12}^2 \\ q_{21}^2 & q_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令 $\gamma = 3$, $\sigma_{11}^2(s) = \sigma_{12}^2(s) = \sigma_{21}^2(s) = 1$, $\sigma_{22}^2(s) = 2$, $s = 1, 2, 3$.

由 Matlab LMI 工具箱求解式(22)~(24)得:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \begin{bmatrix} 0.9424 & -0.1228 \\ -0.1228 & 0.9475 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{12} = \begin{bmatrix} 0.9661 & -0.3036 \\ -0.3036 & 0.9705 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \begin{bmatrix} 1.0424 & -0.1155 \\ -0.1155 & 0.3145 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 1.4296 & -0.2487 \\ -0.2487 & 0.6475 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_{11} &= \begin{bmatrix} 1.0149 & -1.4335 \\ -0.5027 & -0.1133 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_{12} = \begin{bmatrix} 1.2658 & -1.6367 \\ -0.5116 & -0.0016 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_{21} &= \begin{bmatrix} 2.0369 & -0.0718 \\ 0.1219 & -0.3110 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_{22} = \begin{bmatrix} 2.7595 & -0.1671 \\ 0.2689 & -0.6305 \end{bmatrix}, \\ \epsilon_{11} &= 18.6002, \epsilon_{12} = 17.6963, \epsilon_{21} = 1.5355, \epsilon_{22} = 2.8182, \\ \zeta_{11} &= 25.2123, \zeta_{12} = 25.4211, \zeta_{21} = 7.9122, \zeta_{22} = 13.0068. \end{aligned}$$

则由定理 3,反馈控制增益为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} 0.8949 & -1.3969 \\ -0.5585 & -0.1920 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0.8652 & -1.4158 \\ -0.5878 & -0.1855 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{21} &= \begin{bmatrix} 2.0106 & 0.5098 \\ 0.0077 & -0.9861 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0.4776 & -2.3441 \\ -0.3839 & -0.1499 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5 结论

本文针对一类系统结构参数不完全已知的 Markov 跳变系统,利用 LMI 方法,研究了其鲁棒随机稳定的充要条件,提出并证明了具有方差约束的鲁棒 H_∞ 控制器存在条件,并给出了其鲁棒 H_∞ 方差控制器设计方法.与采用代数方法描述的控制器的设计方法相比,本文所设计的控制器求解方便,可以采用 Matlab LMI 工具箱直接求解.仿真结果证明了本文所提方法的可行性和正确性.

参考文献:

- [1] 刘鸣,戴蓓倩,李辉,陆伟,李霄寒.鲁棒性话者辨识中的一种改进的马尔可夫模型[J].电子学报,2002,30(1):46-50.
- [2] Liu Ming, Dai Bei-qian, Li Hui, Lu Wei, Li Xiao-han. An improved HMM for robust speaker recognition[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(1): 46-48. (in Chinese)
- [3] 魏瑞轩,韩崇昭,张宗麟,方洋旺.鲁棒总体均方最小自适应滤波算法与分析[J].电子学报,2002,30(7):1023-1026.
- [4] Wei Rui-xuan, Han Chong-zhao, Zhang Zong-lin, Fang Yang-wang. Robust total least mean square adaptive filter: Algorithm and analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(7): 1024-1026. (in Chinese)
- [5] M Mariton. Jump Linear Systems in Automatic Control[M]. New York: Marcel Dekker, 1990. 91-105.
- [6] O L V Costa, M D Fragoso, RP. Marques. Discrete Time Markov Jump Linear Systems[M]. London: Springer-Verlag, 2005. 135-150.
- [7] Shengyuan Xu, Tonwen Chen. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time stochastic bilinear systems with Markovian switching[J]. Int J Robust Control, 2005, 15: 201-217.
- [8] Peng Shi, El Kebir Boukas, Sing Kiong Nguang, Xianping Guo. Optim robust disturbance attenuation for discrete-time active fault tolerant control systems with uncertainties[J]. Control Appl Meth, 2003, 24: 85-101.
- [9] H Y Chung, W J Chang. Covariance control with variance constraints for continuous perturbed stochastic systems[J]. Syst Control Lett, 1992, 19: 413-417.
- [10] J Lu, R E Skelton. Robust variance control for systems with finite signal-to-noise uncertainty[J]. Automatica, 2000, 36(9): 511-525.
- [11] 王子栋,郭治.线性连续随机系统的容错约束方差控制设计[J].自动化学报,1996,22(4):501-503.
- [12] Wang Zidong, Guo Zhi. Variance-constrained fault-tolerant control for linear continuous stochastic systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1996, 22(4): 501-503. (in Chinese)

- [10] 王子栋,孙翔,孙金生,王执铨.不确定线性系统的鲁棒容错控制设计[J].航空学报,1996,17(1):112-115.
Wang Zidong, Sun Xiang, Sun Jinsheng, Wang Zhiqian. Robust fault-tolerant control and design for uncertain linear systems[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1996, 17(1):112-115. (in Chinese)
- [11] Zidong Wang, Daniel W. C. Ho, Xiaohui Liu. Variance-constrained control for uncertain stochastic systems with missing measurements[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics—Part A: Systems and Humans, 2005, 35(5):746

- 753.

- [12] Zidong Wang, Fuwen Yang, Daniel W. C. Ho, Xiaohui Liu. Robust variance-constrained H_∞ control for stochastic systems with multiplicative noises[J]. J Math Anal Appl, 2007, 328:487-502.
- [13] Wang Y, Xie L, de Souza CE. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. Systems and Control Letters, 1992, 19(7):139-149.
- [14] 俞立.鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M].北京:清华大学出版社,2002.33-34.

作者简介:



伍友利 男,1979年5月出生于湖南省常德市.现为空军工程大学讲师.主要研究方向为结构随机跳变系统理论、导弹制导与控制、武器系统作战使用等.

E-mail: wu_youli@126.com



方洋旺 男,1966年1月出生于安徽省安庆市.现为空军工程大学教授、博导,陕西自动化协会、信号处理协会理事.研究方向为导弹制导与控制、导弹作战使用、随机最优控制理论与应用、非线性控制等.

E-mail: fangyangwang2006@yahoo.com

董福安 男,1958年12月出生于陕西省西安市.空军工程大学教授.主要研究方向为常微分方程及其应用.

E-mail: dongfuan@yahoo.com

刘万俊 男,1962年7月出生于湖南省张家界市.空军工程大学副教授.主要研究方向为导弹制导与控制、导弹作战使用等.

E-mail: liuwanjun@126.com

